

ЛЕКЦИЯ-14

§7.2. Лаплас түрлендіруі және оны интегралдық теңдеулерге қолдану

1. Лаплас түрлендіруі. Берілген нақты t аргументті $f(t)$ функциясының Лаплас түрлендіруі деп комплекс p аргументті

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt \quad (121)$$

функциясын айтамыз. Әрине теңдіктегі $F(p)$ кез келген $f(t)$ функциясы үшін анықтала бермейді. Сондықтан түрлендіруі орынды болатын функциялар класын келтірейік.

Нақты t аргументті $f(t)$ функциясы: а) $f(t) \equiv 0, t > 0$; ә) t осінің кез келген шенелген интервалында интегралданатын функция; б) $|f(t)| \leq Me^{s_0 t}, t \rightarrow \infty$ шарттарын қанағаттандыратын кез келген комплекс мәнді $f(t)$ функциясын түпнұсқа (түпнұсқа) деп айтады. Мұндағы, M, s_0 оң тұрақты шамалар. Бұл теңсіздіктегі s_0 -дің дәл төменгі мәнін $f(t)$ функциясының өсу көрсеткіші деп айтады. (121) формуласымен өрнектелген комплекс аргументті $F(p)$ функциясын $f(t)$ түпнұсқаның кескіні (бейнесі) деп айтады.

Теорема. $\operatorname{Re} p > s_0$ облысында (121) интегралы жинақты, оның үстіне, егер $\operatorname{Re} p \geq s_1 > s_0$ болса, ол бірқалыпты жинақты және сол жартыжазықтықта аналитикалық функция болады.

Қолданбалы есептерде белгілі кескін $F(p)$ бойынша түпнұсқа функциясын табу керек болады.

1 теорема. Берілген $F(p)$ функциясы $\operatorname{Re} p > s_0$ облысында нақты аргументті бөлікті – тегіс $f(t)$ функциясының кескіні болып және оның өсу көрсеткіші s_0 болсын. Сонда:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt} F(p) dp, a > s_0.$$

Бұл өрнекті лапластың Меллиннің кері түрлендіру формуласы деп айтады.

Дәлелдеуі. Көмекші $\varphi(t) = e^{-at} f(t)$, $a > s_0$ функциясын қарастырайық. Фурье интегралы бойынша оны

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) e^{i\lambda(t-\xi)} d\xi$$

түріне келтіреміз. Бұл теңдікте $\varphi(t) = e^{-at} f(t)$ ауыстыруын енгізіп,

$$\begin{aligned} e^{-at} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\xi} f(\xi) e^{i\lambda(t-\xi)} d\xi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-(a+i\lambda)\xi} d\xi \end{aligned}$$

теңдігін аламыз; мұнда біз $t < 0$ жағдайында $f(t) = 0$ екенін ескердік. $a + i\lambda = p$ деп белгілеп және (121) мен осы алынған өрнектерді пайдаланып,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p) e^{pt} dp$$

екенін көрсетеміз. Теорема дәлелденді.

Енді комплекс p аргументті $F(p)$ функциясы $f(t)$ түпнұсқаның кескіні болуы үшін кейбір жеткілікті шарттарды келтірейік.

2 теорема. Егер $F(p)$ функциясы $\operatorname{Re} p > s_0$ облысында аналитикалық, $p \rightarrow \infty$ жағдайда $\operatorname{Re} p \leq a > s_0$ жартыжазықтығында $\arg p$ бойынша бірқалыпты нөлге ұмтылса және $\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p) dp$ интегралы абсолютті жинақты болса, онда $F(p)$ функциясы

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p) e^{pt} dp$$

функциясының кескіні болады

2. Лаплас түрлендіруінің кейбір қасиеттері. Келешекте ыңғайлы болуы үшін $f(t)$ функциясының кескіні $F(p)$ деген ұғымды $f(t) \doteq F(p)$ деп белгілейміз. Түрлендірудің қасиеттерін қарастырайық.

¹⁰ (Сызықтық). Егер $f(t)$ мен $g(t)$ түпнұсқа функциялар болса, онда әрқашан тұрақты α мен β комплекс сандары үшін $\alpha f(t) + \beta g(t) \doteq \alpha F(p) + \beta G(p)$ қатысы орынды мұнда $g(t) \doteq G(p)$.

Бұл өрнектің дұрыстығы ап-айқын.

2⁰ (Ұқсастық). $f(t)$ түпнұсқа болсын. Онда $\forall \alpha$ тұрақтысы үшін $f(\alpha t) \doteq \frac{1}{2} F\left(\frac{p}{\alpha}\right)$ қатысы орынды.

Расында,

$$\int_0^{\infty} f(\alpha t) e^{-pt} dt \Big|_{\alpha=\tau} \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-p\tau/\alpha} - \frac{d\tau}{\alpha} = \frac{1}{2} F\left(\frac{p}{\alpha}\right).$$

3⁰ (Түпнұсқаны дифференциалдау). Егер $f'(t)$ немесе $f''(t)$ функциялары, жалпы жағдайда $f^{(n)}(t)$ функциясы түпнұсқа (түпнұсқа) болса, онда:

$$f'(t) \doteq pF(p) - f(0) \quad (122)$$

немесе

$$f^{(n)}(t) \doteq p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0). \quad (123)$$

Дәлелдеуі. $\operatorname{Re} p = s > s_0$ болғанда $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) e^{-st} = 0$ екенін ескерсек, бөліктеп интегралдап,

$$f'(t) \doteq \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} \Big|_0^{\infty} + p \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt = pF(p) - f(0)$$

(122) өрнегін аламыз

Дәл осы жолмен (123) өрнегі де дәлелденеді.

4⁰ (Түпнұсқаны интегралдау). Егер $f(t)$ түпнұсқа болса, онда $\int_0^t f(\tau) d\tau$ түпнұсқа және

$$\int_0^t f(\tau) d\tau \doteq \frac{F(p)}{p}$$

қатысы орынды.

Дәлелдеуі. $g(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$ функциясының да түпнұсқа екенін оңай байқаймыз, яғни $g(t)$ функциясы а), ә) және б) шарттарын қанағаттандырады.

$f'(t) \doteq F(p), g(t) \doteq G(p)$ болсын. $g'(t) = f(t)$ теңдігінен $F(p) = pG(p) - g(0) = pG(p)$.
Бұдан $g(t) \doteq G(p) = \frac{F(p)}{p}$ немесе $\int_0^t g(\tau) d\tau = \frac{F(p)}{p}$ қатынасы шығады.

$f(t)$ және $g(t)$ түпнұсқа функциялары үшін ұйысу операциясы әрқашан орынды және

$$f * g = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau.$$

5⁰ (Көбейту теоремасы). Егер $f(t) \doteq F(p), g(t) \doteq G(p)$ болса, онда олардың $f * g$ ұйысу да түпнұсқа болады және

$$f * g = F(p) \cdot G(p). \quad (124)$$

Дәлелдеуі. $f(\tau)g(t-\tau)$ көбейтіндісі τ аргументінің $0 \leq \tau \leq t$ облысының сыртқы нүктелерінде нөлге тең. Ал $f(\tau)g(t-\tau)$ функциясынан алынған интегралдың мәні бар және а), ә), б) шарттарын қанағаттандырады. Лаплас түрлендіруін қолданып,

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-pt} \left\{ \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau \right\} dt &= \int_0^{\infty} f(\tau) \left\{ \int_{\tau}^{\infty} g(t-\tau)e^{-pt} dt \right\} d\tau \Big|_{t=\tau=t_1} = \\ &= \int_0^{\infty} f(\tau)e^{-p\tau} d\tau \int_0^{\infty} g(t_1)e^{-pt_1} dt_1 = G(p)F(p). \end{aligned}$$

Кейбір интегралдық теңдеулерді шешу кезінде мына төмендегі күрделі көбейту теоремасы пайдалы.

6⁰ (Эфрос теоремасы). $f(t) = F(p)$ болсын және аналитикалық функциялар $G(p)$ мен $q(p)$ мынадай байланыста $G(p)e^{-iq(p)} = g(t, \tau)$ болсын, сонда

$$F[q(p)]G(p) = \int_0^{\infty} f(\tau)g(t, \tau)d\tau.$$

Дәлелдеуі. Лаплас түрлендіруін қолданып,

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-pt} \left\{ \int_0^{\infty} f(\tau)g(t, \tau)d\tau \right\} dt &= \int_0^{\infty} f(\tau) \left\{ \int_0^{\infty} g(t, \tau)e^{-pt} dt \right\} d\tau = \\ &= \int_0^{\infty} f(\tau)G(p)e^{-\tau \cdot q(p)} d\tau = G(p)F[q(p)]. \end{aligned}$$

7⁰ Бізге өсу көрсеткіштері s_1 мен s_2 болған $f(t)$, $g(t)$ түпнұсқалары берілсін. Олардың көбейтіндісі де түпнұсқа болады, оның үстіне

$$g(t)f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} F(q)G(p-q)dq, \text{ мұндағы } b > s_1, \operatorname{Re} b > s_2 + b.$$

Дәлелдеуі. Әрине, егер $f(t)$ мен $g(t)$ түпнұсқалары s_1 мен s_2 өсу көрсеткішті түпнұсқа болса, онда $f(t)g(t)$ көбейтіндісі де көрсеткіші $s = s_1 + s_2$ түпнұсқа болады. Лаплас түрлендіруін қолданып,

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} f(t)g(t)e^{-pt} dt &= \int_0^{\infty} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(q)e^{qt} dq \right\} g(t)e^{-pt} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} F(q) \left\{ \int_0^{\infty} g(t)e^{-(p-q)t} dt \right\} dq = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} F(q)G(p-q)dq. \end{aligned}$$

3. Вольтерраның интегралдық теңдеуі. 1) Лапласың түрлендіруін

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^x K(x-s)\varphi(s)ds + f(x)$$

интегралдық теңдеуіне қолданайық.

$K(x)$ пен $f(x)$ функциялары ($x > 0$) үзіліссіз функциялар және түпнұсқалар болсын. Егер $|K(x)| \leq M_1 e^{s_1 x}$, $|f(x)| \leq M_2 e^{s_2 x}$ болса, онда теңдеудің шешімі $\varphi(x)$ -ні $|\varphi(x)| \leq M_3 e^{s_3 x}$, $s_3 > \max\{s_1, s_2\}$ түрінде бағалау қиын емес. Демек, $\varphi(x)$ функциясы да түпнұсқа.

$\varphi(x) \doteq \phi(p)$, $K(x) \doteq K(p)$, $f(x) \doteq F(p)$ болсын. Берілген теңдеудің екі жағына да Лаплас түрлендіруін қолданып, оған (124) өрнегін пайдалансақ, $\phi(p) = \lambda k(p)\phi(p) + F(p)$ теңдеуін аламыз. Бұдан

$$\phi(p) = \frac{F(p)}{1 - \lambda k(p)}. \quad (125)$$

Бұл өрнектегі $\phi(p)$ функциясы $\operatorname{Re} p = s > s_3$ жарты жазықтығында аналитикалық болуы үшін (125)-тің бөлімінің $\operatorname{Re} p > s_3$ жартыжазықтығында түбірлері болмауы керек.

Лапласың (Меллинше кері түрлендіріп) түпнұсқа табу формуласын пайдаланып,

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} \frac{F(p)}{1-\lambda k(p)} e^{pt} dp, \quad s > s_3$$

функциясын анықтаймыз. (125) теңдігін

$$\phi(p) - F(p) = \frac{F(p)}{1-\lambda k(p)} - F(p) = \frac{\lambda k(p)}{1-\lambda k(p)} F(p)$$

түрінде немесе $\phi(p) = F(p) + \lambda R(p; \lambda) F(p)$ түрінде жазуға болады, мұндағы,

$$R(p; \lambda) = \frac{k(p)}{1-\lambda k(p)}.$$

Егер $R(p; \lambda) = R(t; \lambda)$ екені белгілі болса, онда берілген теңдеудің шешімін

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^t R(x-s; \lambda) f(s) ds$$

түрінде табамыз, мұндағы, $R(x; \lambda)$ теңдеу ядросының резольвентасы.

1 мысал. $\varphi(x) = \cos x + \int_0^x e^{-(x-t)} \varphi(t) dt$ теңдеуін шешу керек.

Шешуі. $e^{-x} = \frac{1}{p+1}$ болғандықтан, теңдеуге Лаплас түрлендіруін қолданып,

$$\phi(p) = \frac{p}{p^2+9} + \frac{1}{p+9} \phi(p)$$

өрнегін аламыз. Бұдан

$$\phi(p) = \frac{1}{p^2+9} + \frac{1}{p^2+9}.$$

Соңғы өрнектен түпнұсқа тауып, интегралдық теңдеудің шешімін

$$\varphi(x) = \cos 3x + \frac{1}{3} \sin 3x$$

түрінде анықтаймыз.

1-текті

$$\int_0^x K(x-s)\varphi(s)ds = f(x)$$

интегралдық теңдеуін қарастырайық. бұған Лаплас түрлендіруін қолданып, $K(p)\phi(p) = F(p)$ өрнегін аламыз. Бұдан

$$\phi(p) = \frac{F(p)}{K(p)}.$$

Егер $K(0) \neq 0$ болса, онда соңғы өрнекке Лапласың кері түрленуін қолданып, теңдеудің шешімін

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{F(p)}{K(p)} e^{pt} dp$$

түрінде табамыз.

2 мысал. 1-текті $x^4 = \int_0^x (x^2 + 6xt - 7t^2)\varphi(t)dt$ интегралдық теңдеудің шешімін табайық. Ядро $K(x,t) = 8(x-t)t - (x-t)^2$. Сондықтан теңдеуді $x^4 = \int_0^x (x-t)^2 \varphi(t)dt + 8 \int_0^x (x-t)t \varphi(t)dt$ түрінде жазып, одан кейін $x\varphi(x) \doteq \phi'(p)$ екенін ескеріп, соңғы теңдеуден

$$\frac{4!}{p^5} = \frac{3}{p^3} \cdot \phi(p) - \frac{8}{p^2} \phi'(p)$$

өрнегін аламыз. Бұдан $\phi(p) = c\sqrt{p} + \frac{4}{3p^2}$ және $\varphi(x) = \frac{4x}{3} + \frac{C}{x^{\frac{5}{4}}}$ түрінде теңдеудің шешімін аламыз.

2) Лаплас түрлендіруінің Вольтерра интегралдық теңдеулер жүйесіне қолданылуы.

$$\varphi_i(x) = f_i(x) + \lambda \sum_{j=1}^n \int_0^x K_{ij}(x-s)\varphi_j(s)ds, \quad i=1,2,\dots,n$$

теңдеулері жүйесін қарастырайық, мұндағы, $K_{ij}(x)$ және $f(x)$ функциялары үзіліссіз оргинал функциялар. Берілген жүйенің екі жағына да Лаплас түрлендіруін қолданып,

$$\phi_i(p) = F_i(p) + \lambda \sum_{j=1}^n K_{ij}(p) \phi_j(p), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

жүйесін аламыз. Бұдан $\phi_1(p), \phi_2(p), \dots, \phi_n(p)$ кескіндерін анықтап, содан кейін оларға Лапластың кері түрлендіруін қолданып, берілген жүйенің шешімін табамыз.

3 мысал.

$$\begin{cases} \phi_1(x) = f(x) + \int_0^x \phi_2(t) dt, \\ \phi_2(x) = g(x) + \int_0^x \cos(x-t) \phi_1(t) dt \end{cases}$$

жүйенің шешімін табу керек.

Шешуі. $1 \div \frac{1}{p}$, $\cos x \div \frac{p}{p^2 + 1}$ болғандықтан жүйеге Лаплас түрлендіруін қолданып, $\phi_1(p) = F(p) + \frac{1}{p} \phi_2(p)$, $\phi_2(p) = G(p) + \frac{p}{p^2 + 1} \phi_1(p)$, алгебралық теңдеулері жүйесін аламыз. Бұдан

$$\phi_1(p) = F(p) + \frac{1}{p} F(p) + \frac{p^2 + 1}{p^3} G(p),$$

$$\phi_2(p) = \frac{1}{p} F(p) + G(p) + \frac{1}{p^2} G(p)$$

екенін анықтаймыз. Бұл өрнектерге ұйысу операциясын қолданып,

$$\phi_1(x) = f(x) + \int_0^x (x-t) f(t) dt + \int_0^x g(x-t) \left(1 + \frac{t^2}{2}\right) dt,$$

$$\phi_2(x) = g(x) + \int_0^x (x-t) g(t) dt + \int_0^x f(t) dt$$

түрінде берілген жүйенің шешімін табамыз.

3) Интегро-дифференциалдық теңдеуді шешу. Мына интегро-дифференциалдық

$$\varphi^n(x) + a_1 \varphi^{(n-1)}(x) + \dots + a_n \varphi(x) + \sum_{j=0}^n \int_0^x K_j(x-s) \varphi^{(j)}(s) ds = f(x) \quad (126)$$

теңдеуінің

$$\varphi(0) = \varphi_0, \varphi'(0) = \varphi_1, \dots, \varphi^{(n-1)}(0) = \varphi_{n-1} \quad (127)$$

шарттарын қанағаттандыратын шешімін табу керек. Мұнда $K_j(x)$, $f(x)$ функциялары түпнұсқа функциялар болсын, сонда теңдеудің шешімі $\varphi(x)$ -те түпнұсқа болады.

$\varphi(x) \div \Phi(p)$, $f(x) \div F(p)$, $K_j(x) \div K_j(p)$ болсын (126) теңдеуіне Лаплас түрлендіруін қолданып,

$$\Phi(p)[p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n + \sum_{j=0}^n K_j(p) p^j] = F(p)$$

өрнегін аламыз, мұндағы, $F(p)$ белгілі функция. Соңғы теңдеуден

$$\Phi(p) = \frac{F(p)}{p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n + \sum_{j=1}^n K_j(p) p^j}.$$

Бұл өрнекке Лапласының кері түрлендіру формуласын қолданып, (126) теңдеуінің (127) шарттарын қанағаттандыратын шешімін табамыз:

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{F(p)e^{pt} dt}{p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n + \sum_{j=1}^n K_j(p) p^j}.$$

4 мысал. $\varphi''(x) + \int_0^x \sin(x-t)[\varphi''(t) + \varphi(t)]dt = 2 \cos x$ теңдеуінің

$\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$ шарттарын қанағаттандыратын шешімін табу керек.

Шешуі. $\sin x \div \frac{1}{p^2 + 1}$, $\cos x \div \frac{p}{p^2 + 1}$ болғандықтан теңдеуге Лаплас түрлендіруін қолдансақ,

$$p^2 \Phi(p) + \frac{1}{p^2 + 1} [p^2 \Phi(p) + \Phi(p)] = \frac{2p}{p^2 + 1}$$

өрнегін аламыз. Бұдан $\Phi(p) = \frac{2p}{(p^2 + 1)^2}$, яғни $\varphi(x) = x \sin x$ берілген теңдеудің берілген шарттарды қанағаттандыратын шешімі болады.

4) Әлсіз ерекшелігі бар ядролы Вольтерраның интегралдық теңдеуін шешу.

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^x \frac{K_0(x-s)}{(x-s)^\alpha} \varphi(s) ds + f(x), \quad 0 < \alpha < 1 \quad (128)$$

теңдеуін қарастырайық. Мұндағы, $K_0(x), f(x)$ функциялары берілген түпнұсқа функциялар болсын: $f(x) \div F(p)$ және $K_0(x) \div K_\alpha(p)$. Енді $\frac{1}{x^\alpha}$ функциясының Лаплас түрлендіруін табайық:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-px}}{x^\alpha} dx \mid px = t \mid = p^\alpha \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{t^\alpha} \frac{dt}{p} = p^{\alpha-1} \Gamma(1-\alpha);$$

демек,

$$\frac{K_0(x)}{x^\alpha} \div \Gamma(1-\alpha) \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} K_0(q) (p-q)^{\alpha-1} dq = H(p),$$

мұнда, $b > 0$. Олай болса, (128) теңдеуіне Лаплас түрлендіруін қолдансақ, $\Phi(p) = \lambda H(p) \Phi(p) + F(p)$, бұдан

$$\Phi(p) = \frac{F(p)}{1 - \lambda H(p)},$$

яғни

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{F(p)}{1 - \lambda H(p)} e^{px} dx$$

берілген теңдеудің шешімі болады.

5 мысал. $\varphi(x) = \lambda \int_0^x \frac{\varphi(s)}{\sqrt{x-s}} ds + f(x)$ теңдеуін қарастырайық.

$$\frac{1}{\sqrt{x}} \div \int_0^\infty \frac{e^{-pt}}{\sqrt{x}} dx \mid px = t \mid = \sqrt{p} \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \frac{dt}{p} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{p}} = \sqrt{\frac{\pi}{p}}$$

болғандықтан теңдеу $\Phi(p) = F(p) + \lambda \sqrt{\frac{\pi}{p}} \Phi(p)$ түрінде жазылады, ал бұдан

$$\Phi(p) = F(p) + \frac{\lambda \sqrt{\frac{\pi}{p}}}{1 - \lambda \sqrt{\frac{\pi}{p}}} F(p), \quad \frac{\lambda \sqrt{\frac{\pi}{p}}}{1 - \lambda \sqrt{\frac{\pi}{p}}} = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \left(\frac{\pi}{p}\right)^{n/2}.$$

Бұл өрнекке кері түрлендіру формуласын қолданып, теңдеудің шешімін аламыз:

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x R(x-t) f(t) dt,$$

мұнда, $R(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda \sqrt{\pi x})^n}{x \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.$

6 мысал. Абельдің интегралдық

$$\int_0^x \frac{\varphi(t)}{\sqrt{x-t}} dt = \sin x$$

теңдеуін шешу керек.

Шешуі. $\frac{1}{\sqrt{x}} \div \sqrt{\frac{\pi}{p}} \cdot \sin x \div \frac{1}{p^2+1}$ болғандықтан берілген теңдеуден

$$\sqrt{\frac{\pi}{p}} \Phi(p) = \frac{1}{p^2+1} \quad \text{бұдан} \quad \Phi(p) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{p}{p^2+1} \cdot \frac{1}{\sqrt{p}}, \quad \text{демек,} \quad \varphi(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^x \frac{\cos t}{\sqrt{x-t}} dt$$

$$\text{немесе } \varphi(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^x \frac{\cos(x-t)}{\sqrt{t}} dt.$$